

# Self-Propelled motion を行う球体に対する Starting Problem

名古屋大学大学院多元数理科学研究科  
浜松寛地 (Kanchi Hamamatsu)

## 概要

3次元空間に1つの球体が存在し、その外部が非圧縮性粘性流体で満たされている状況で、流れとの相互作用による球体の self-propelled motion について考える。本講演ではこの self-propelled motion に対する starting problem の研究によって得られた結果を紹介する。

## 1 導入

本講演では、私が現在研究を行っている self-propelled motion を行う球体に対する starting problem について得られた結果を紹介する。Starting problem とは Finn[2] によって提唱された問題で、非圧縮性粘性流体で3次元空間中に剛体が一つある状況を考え、初期時刻で静止した剛体の並進速度が徐々に上昇し、ある時刻以降は一定の並進速度となるとき、流れの長時間挙動について剛体の最終的な並進速度で決まるような定常解に収束するかどうかを問うものである。この問題が肯定的に解かれる時、その定常解は attainable と呼ばれる。この starting problem は Kobayashi-Shibata[6] による線型化方程式の初期値問題の生成する Oseen 半群の  $L^p$ - $L^q$  評価が証明されたことを受けて、Galdi-Heywood-Shibata[3] によって解決された。Takahashi[8] によって、starting problem での摂動の  $t \rightarrow \infty$  での減衰率は安定性問題でのそれよりも速いことが示された。また、剛体の回転運動に対する starting problem については Takahashi[9] によって解決された。

彼らの研究ではいずれも剛体の運動は既知であることが仮定されているが、今回扱う self-propelled motion では剛体の運動は未知であり流体の運動と相互作用を行う。Self-propelled motion とは、剛体の運動が外力の作用に依らず、剛体自身に内在する運動メカニズム及び流体との相互作用によってのみ定まる運動をいう。剛体に内在する運動メカニズムを表す境界上の速度を extra velocity と呼ぶ。そこで、self-propelled motion に対する starting problem として、初期時刻で剛体と流体がともに静止した状態から extra velocity が徐々に上昇し、ある時刻以降で extra velocity が時刻に依らない（または時間周期的な）関数となるとき、流れの長時間挙動が最終的な extra velocity で決まるような定常（または時間周期）self-propelled motion に収束するかどうかについて考える。Self-propelled motion に対する starting problem についての先行研究は Silvestre[7] によるものがある。彼女は剛体と流れがともに軸対称である場合の self-propelled motion に対する starting problem についての研究を行った。この研究は self-propelled motion に対する starting problem の唯一の先行研究である。本講演では剛体が球体である場合の self-propelled motion に対する starting problem を扱い、剛体の形状に関しては Silvestre よりも強い仮定をしているが、流れは軸対称でなくでもよいという点で彼女の研究と異なっている。

いま、球体は半径が 1, 密度が  $\rho > 0$  とし、平行移動によって原点をこの球体の中心に固定する。また、 $B := \{x \in \mathbb{R}^3; |x| < 1\}$ ,  $\Omega := \{x \in \mathbb{R}^3; |x| > 1\}$  とし、それぞれ球体、流体の占めている空間を表す。いま、球体の extra velocity  $u_*(x, t) \in \mathbb{R}^3$  による self-propelled motion とその周りでの流れは、流体の速度  $u_\infty(x, t) \in \mathbb{R}^3$ , 圧力  $p_\infty(x, t) \in \mathbb{R}$ , 球体の並進速度  $\eta_\infty(t) \in \mathbb{R}^3$ , 回転角速度  $\omega_\infty(t) \in \mathbb{R}^3$  を未知関数として次に従う：

$$\begin{cases} \partial_t u_\infty + (u_\infty - \eta_\infty) \cdot \nabla u_\infty = \Delta u_\infty - \nabla p_\infty, \\ \operatorname{div} u_\infty = 0, \\ m \frac{d\eta_\infty}{dt} + \int_{\partial\Omega} \mathbb{S}(u_\infty, p_\infty) \nu d\sigma = 0, \\ J \frac{d\omega_\infty}{dt} + \int_{\partial\Omega} x \times \mathbb{S}(u_\infty, p_\infty) \nu d\sigma = 0, \\ u_\infty \rightarrow 0 \quad (|x| \rightarrow \infty), \\ u_\infty|_{\partial\Omega} = \eta_\infty + \omega_\infty \times x + u_*. \end{cases} \quad (1.1)$$

ここで,  $m$  は球体の質量,  $J$  は慣性モーメントテンソル,  $\mathbb{S}$  は応力テンソルを表す。すなわち,

$$m = \frac{4\pi}{3}\rho, \quad J = \frac{2}{5}m\mathbb{I},$$

$$\mathbb{S}(u_\infty, p_\infty) = 2Du_\infty - p_\infty\mathbb{I}, \quad Du_\infty = \frac{\nabla u_\infty + (\nabla u_\infty)^T}{2}.$$

また, (1.1) の第一, 二式は Navier-Stokes 方程式, 第三式は運動量保存則, 第四式は角運動量保存則を表す。(1.1) の解で最も重要なものは定常解と時間周期解である。

次に非負値単調非減少関数  $\psi \in C^{1+\theta_0}([0, \infty))$  ( $\theta_0 \in (0, 1)$ ) は  $\psi(0) = 0$ ,  $\psi(t) = 1(t \geq 1)$  を満たすとし,  $M := \sup_{[0, \infty)} |\psi'(t)|$  とする。もしも, 流体と球体が初期時刻で静止しており, extra velocity  $\psi(t)u_*(x, t)$  で self-propelled motion を行う場合, 流速を  $\tilde{u}$ , 圧力  $\tilde{p}$ , 並進速度  $\tilde{\eta}$ , 回転角速度  $\tilde{\omega}$  とすると次の式が成り立つ:

$$\begin{cases} \partial_t \tilde{u} + (\tilde{u} - \tilde{\eta}) \cdot \nabla \tilde{u} = \Delta \tilde{u} - \nabla \tilde{p}, \\ \operatorname{div} \tilde{u} = 0, \\ m \frac{d\tilde{\eta}}{dt} + \int_{\partial\Omega} \mathbb{S}(\tilde{u}, \tilde{p}) \nu d\sigma = 0, \\ J \frac{d\tilde{\omega}}{dt} + \int_{\partial\Omega} x \times \mathbb{S}(\tilde{u}, \tilde{p}) \nu d\sigma = 0, \\ \tilde{u} \rightarrow 0 \quad (|x| \rightarrow \infty), \\ \tilde{u}|_{\partial\Omega} = \tilde{\eta} + \tilde{\omega} \times x + \psi u_*, \\ \tilde{u}(x, 0) = 0, \quad \tilde{\eta}(0) = \tilde{\omega}(0) = 0. \end{cases}$$

これらに対して

$$u = \tilde{u} - \psi u_\infty, \quad p = \tilde{p} - \psi p_\infty, \quad \eta = \tilde{\eta} - \psi \eta_\infty, \quad \omega = \tilde{\omega} - \psi \omega_\infty$$

とおくと,  $\{u, p, \eta, \omega\}$  は次の式に従う:

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t u + \psi(u_\infty - \eta_\infty) \cdot \nabla u - \Delta u + \nabla p, \\ = -(u - \eta) \cdot \nabla u - \psi(u - \eta) \cdot \nabla u_\infty, \\ - \psi(\psi - 1)(u_\infty - \eta_\infty) \cdot \nabla u_\infty - \psi' u_\infty, \\ \operatorname{div} u = 0, \\ m \frac{d\eta}{dt} + \int_{\partial\Omega} \mathbb{S}(u, p) \nu d\sigma + m\psi' \eta_\infty = 0, \\ J \frac{d\omega}{dt} + \int_{\partial\Omega} x \times \mathbb{S}(u, p) \nu d\sigma + J\psi' \omega_\infty = 0, \\ u \rightarrow 0 (|x| \rightarrow \infty), \\ u|_{\partial\Omega} = \eta + \omega \times x, \\ u(x, 0) = 0, \quad \eta(0) = \omega(0) = 0. \end{array} \right. \quad (1.2)$$

本講演では小さな  $(u_\infty, \eta_\infty, \omega_\infty)$  に対して, 大域解  $(u, \eta, \omega)$  が得られ, その減衰率が安定性問題の摂動の減衰よりも速いことを報告する. この結果は Hishida[5] によって (1.2) の線型化方程式の初期値問題の生成する発展作用素の  $L^p$ - $L^q$  評価が得られたことで着想を得たが, [5] とは少し異なる仮定のもとでもこの減衰評価を適用することができるということも新たな知見である.

## 2 数学的準備

主結果を述べる前に、いくつかの数学的な準備を行う.  $1 < q < \infty$  に対して

$$L_R^q := \{U \in L^q(\mathbb{R}^3)^3; U|_B = \eta + \omega \times x, \eta, \omega \in \mathbb{R}^3\},$$

$$X_q := \{U \in L_R^q; \operatorname{div} U = 0 \text{ in } \mathbb{R}^3\}$$

と定める.  $X_q$  はノルム

$$\|U\|_{X_q} := \left( \|U\|_{q,\Omega}^q + \rho \|U\|_{q,B}^q \right)^{\frac{1}{q}}$$

で Banach 空間となる. [5] により, pairing

$$\langle U, V \rangle_{\mathbb{R}^3, \rho} = \int_{\Omega} U \cdot V dx + \rho \int_B U \cdot V dx$$

の意味で  $X_q^* = X_{q'}$  となることが知られている.

また, 関数空間  $Z_q$  を

$$Z_q := \{V \in L_R^q; V|_\Omega = \nabla p, p \in L_{loc}^q(\bar{\Omega}), \nabla p \in L^q(\Omega),$$

$$V|_B = \eta_v + \omega_v \times x, \eta_v = -\frac{1}{m} \int_{\partial\Omega} p \nu d\sigma, \omega_v = -J^{-1} \int_{\partial\Omega} x \times (p \nu) d\sigma\}$$

と定めると,  $L_R^q = X_q \oplus Z_q$  となることが知られており, これにより有界な射影  $\mathbb{P}: L_R^q \rightarrow X_q$  を定めることができる.

(1.2) の線型化方程式

$$\begin{cases} \partial_t u - \Delta u + \nabla p = 0, & \operatorname{div} u = 0, \\ m \frac{d\eta}{dt} + \int_{\partial\Omega} \mathbb{S}(u, p) \nu d\sigma = 0 \\ J \frac{d\omega}{dt} + \int_{\partial\Omega} x \times \mathbb{S}(u, p) \nu d\sigma = 0 \\ u \rightarrow 0 (|x| \rightarrow \infty) \\ u|_{\partial\Omega} = \eta + \omega \times x. \end{cases} \quad (2.1)$$

は  $X_q$  上の常微分方程式

$$\frac{dU}{dt} + AU = 0$$

と書き換えることができる。ここで  $A$  は Stokes-structure 作用素と呼ばれ、次のように定められる：

$$\begin{aligned} D_q(A) &= \{U \in X_q \cap W^{1,q}(\mathbb{R}^3); u = U|_\Omega \in W^{2,q}(\Omega)\} \\ AU &= \mathbb{P}\mathcal{A}U \\ \mathcal{A}U &= \begin{cases} -\Delta u, & x \in \Omega, \\ \frac{1}{m} \int_{\partial\Omega} (2Du) \nu d\sigma + \left( J^{-1} \int_{\partial\Omega} y \times (2Du) \nu d\sigma_y \right) \times x, & x \in B. \end{cases} \end{aligned}$$

[1] により、 $-A$  は有界解析半群  $e^{-tA}$  を生成することが知られている。

次に Oseen-structure 作用素  $L_+(t)$  を

$$\begin{aligned} D_q(L_+(t)) &= D_q(A), \quad L_+(t)U = AU + B(t)U \\ B(t)U &= \mathbb{P}[\{\psi(u_\infty - \eta_\infty) \cdot \nabla u\} \chi_\Omega] \quad \text{for } u = U|_\Omega \end{aligned}$$

と定める。 (1.1) の解  $(u_\infty, \eta_\infty, \omega_\infty)$  に

$$\begin{cases} u_\infty \in L^\infty(\mathbb{R}; L^{q_0}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)) \quad \text{with some } q_0 \in (1, 3) \\ \eta_\infty, \omega_\infty \in L^\infty(\mathbb{R}; \mathbb{R}^3) \\ u_\infty \in C^\theta(\mathbb{R}; L^\infty(\Omega)), \eta_\infty, \omega_\infty \in C^\theta(\mathbb{R}; \mathbb{R}^3) \quad \text{with some } \theta \in (0, 1) \end{cases} \quad (A.1)$$

を仮定し、

$$\begin{aligned} |||U_\infty||| &:= \sup_{t>0} (\|u_\infty(t)\|_{q_0, \Omega} + \|u_\infty(t)\|_{\infty, \Omega} + |\eta_\infty(t)| + |\omega_\infty(t)|), \\ [U_\infty]_\theta &:= \sup_{0 < s < t} \frac{\|u_\infty(t) - u_\infty(s)\|_{\infty, \Omega} + |\eta_\infty(t) - \eta_\infty(s)| + |\omega_\infty(t) - \omega_\infty(s)|}{(t-s)^\theta} \end{aligned}$$

と定める。このとき、作用素  $L_+(t)$  は次の性質を持つ発展作用素  $\{T(t, s)\}_{t \geq s}$  を生成する：

$$T(t, \tau)T(\tau, s) = T(t, s) \quad (s \leq \tau \leq t), \quad T(t, t) = \mathcal{I} \quad \text{in } \mathcal{L}(X_q),$$

$(t, s) \mapsto T(t, s)F \in X_q$  is continuous for  $F \in X_q$ ,

$$\begin{cases} T(\cdot, s)F \in C^1((s, \infty); X_q) \cap C((s, \infty); D_q(A)), \\ \partial_t T(t, s)F + L_+(t)T(t, s)F = 0 \quad \text{for } F \in X_q, t \in (s, \infty), \end{cases}$$

$$\begin{cases} T(t, \cdot)F \in C^1((-\infty, t); X_q), \\ \partial_s T(t, s)F = T(t, s)L_+(s)F \quad \text{for } F \in D_q(A), s \in (-\infty, t). \end{cases}$$

また  $(u_\infty, \eta_\infty, \omega_\infty)$  が  $\partial\Omega$  に接する, すなわち

$$\nu \cdot (u_\infty - \eta_\infty - \omega_\infty \times x)|_{\partial\Omega} = 0 \quad (\text{A.2})$$

を満たす時, 次のような  $L^p$ - $L^q$  評価が Hishida[5] によって得られた.

**Proposition 2.1.** (A.1),(A.2) を仮定し,  $\|U_\infty\| < \alpha$ ,  $[U_\infty]_\theta < \beta$  とする.

1.  $q \in (1, \infty), r \in [q, \infty]$  とする. ある定数  $C = C(q, r, \alpha, \beta, \theta, M)$  が存在し, 任意の  $t > s, F \in X_q$  に対して

$$\|T(t, s)F\|_{r, \mathbb{R}^3} \leq C(t-s)^{-\frac{3}{2}(\frac{1}{q}-\frac{1}{r})}\|F\|_{q, \mathbb{R}^3} \quad (2.2)$$

とできる.

2.  $r_1 \in (1, \frac{4}{3}], r_1 \leq q \leq r < \infty$  とする. ある定数  $C = C(q, r, r_1, \alpha, \beta, \theta, M)$  が存在し, 任意の  $t > s, F \in X_q$  に対して

$$\|\nabla T(t, s)F\|_{r, \mathbb{R}^3} \leq C(t-s)^{-\frac{1}{2}-\frac{3}{2}(\frac{1}{q}-\frac{1}{r})}(1+t-s)^{\max\{\frac{1}{2}(1-\frac{3}{r}), 0\}}\|F\|_{q, \mathbb{R}^3}$$

とできる.

3.  $r_2 \in [4, \infty), 1 < q \leq r \leq r_2$  とする. ある定数  $C = C(q, r, r_2, \alpha, \beta, \theta, M)$  が存在し, 任意の  $t > s$  及び  $(F\nu)|_{\partial\Omega} = 0$ ,  $\operatorname{div} F \in L_R^p(\mathbb{R}^3)^3$  ( $p \in (1, \infty)$ ) を満たす  $F \in L^q(\mathbb{R}^3)^{3 \times 3}$  に対して

$$\|T(t, s)\mathbb{P}\operatorname{div} F\|_{r, \mathbb{R}^3} \leq C(t-s)^{-\frac{1}{2}-\frac{3}{2}(\frac{1}{q}-\frac{1}{r})}(1+t-s)^{\max\{\frac{1}{2}(\frac{3}{q}-2), 0\}}\|F\|_{q, \mathbb{R}^3} \quad (2.3)$$

とできる.

4.  $r_1 \in (1, \frac{4}{3}], r_2 \in [4, \infty), r_1 \leq q \leq r \leq r_2$  とする. ある定数  $C = C(q, r, r_1, r_2, \alpha, \beta, \theta, M)$  が存在し, 任意の  $t > s$  及び  $(F\nu)|_{\partial\Omega} = 0$ ,  $\operatorname{div} F \in L_R^p(\mathbb{R}^3)^3$  ( $p \in (1, \infty)$ ) を満たす  $F \in L^q(\mathbb{R}^3)^{3 \times 3}$  に対して

$$\|\nabla T(t, s)\mathbb{P}\operatorname{div} F\|_{r, \mathbb{R}^3} \leq C(t-s)^{-1-\frac{3}{2}(\frac{1}{q}-\frac{1}{r})}(1+t-s)^{\max\{\frac{1}{2}(1-\frac{3}{r}), 0\}+\max\{\frac{1}{2}(\frac{3}{q}-2), 0\}}\|F\|_{q, \mathbb{R}^3}$$

とできる.

### 3 主結果

本研究の主結果の一つ目は, Hishida によって得られた Proposition 2.1 が少し異なる仮定でも得られることがある. これから述べる命題では  $(u_\infty, \eta_\infty, \omega_\infty)$  は必ずしも  $\partial\Omega$  に接する必要はない. しかし, extra velocity  $u_*$  に仮定を要する. (A.2) の代わりに,  $(u_\infty, \eta_\infty, \omega_\infty)$  は流量, 一次モーメント及び二次モーメントが

それぞれ 0, すなわち

$$\begin{cases} \int_{\partial\Omega} \nu \cdot (u_\infty - \eta_\infty - \omega_\infty \times x) d\sigma = \int_{\partial\Omega} \nu \cdot u_* d\sigma = 0 \\ \int_{\partial\Omega} \nu \cdot (u_\infty - \eta_\infty - \omega_\infty \times x) x_i d\sigma = \int_{\partial\Omega} \nu \cdot u_* x_i d\sigma = 0, \quad i \in \{1, 2, 3\}, \\ \int_{\partial\Omega} \nu \cdot (u_\infty - \eta_\infty - \omega_\infty \times x) x_i x_j d\sigma = \int_{\partial\Omega} \nu \cdot u_* x_i x_j d\sigma = 0, \quad i, j \in \{1, 2, 3\} \end{cases} \quad (\text{A.3})$$

を仮定する. ここで (A.2)  $\Rightarrow$  (A.3) に注意する. さらに,

$$u_* \in L^\infty(\mathbb{R}; W^{1-\frac{1}{r}, r}(\partial\Omega)) \cap C^\theta(\mathbb{R}; W^{1-\frac{1}{r}, r}(\partial\Omega)) \quad (\text{with some } r > 3) \quad (\text{A.4})$$

を仮定する.

**Proposition 3.1.** (A.1), (A.3), (A.4) を仮定する. このとき, Proposition 2.1 と同様の結果が成り立つ.

もしも  $(u_\infty, \eta_\infty, \omega_\infty)$  が (A.2) を満たす時,

$$U_\infty := u_\infty \chi_\Omega + (\eta_\infty + \omega_\infty \times x) \chi_B$$

とおくと任意の  $q \in [q_0, \infty)$  に対して  $U_\infty(t) \in X_q \cap L^\infty(\mathbb{R}^3)$  が成り立ち, この事実は Proposition 2.1 の証明で用いられる. Proposition 3.1 では (A.2) を仮定しないため, 同じことは言えないが, 仮定 (A.4) を課すことにより,  $\partial\Omega$  上の関数である  $u_*(t)$  がソレノイダルな拡張

$$\tilde{u}_*(t) \in W^{1,r}(B) \subset L^{q_0}(B) \cap L^\infty(B)$$

をもつ. このことにより

$$\tilde{U}_\infty := u_\infty \chi_\Omega + (\eta_\infty + \omega_\infty \times x + \tilde{u}_*) \chi_B$$

は任意の  $q \in [q_0, \infty)$  に対して,  $\tilde{U}_\infty(t) \in X_q \cap L^\infty(\mathbb{R}^3)$  が成り立ち, Proposition 2.1 の証明と同様な議論が可能になる. (A.4) のヘルダー条件は, この  $\tilde{U}_\infty$  が  $C^\theta(\mathbb{R}; L^\infty(\mathbb{R}^3))$  に属するために必要である.

仮定 (A.3) は duality を用いた議論を行う際に必要となる. 実際,

$$D_q(L_-(t)) = D_q(A), \quad L_-(t)U = A - B(t)U$$

とおくと,  $U \in D_q(A)$ ,  $V \in D_{q'}(A)$  に対して

$$\langle L_+(t)U, V \rangle_{\mathbb{R}^3, \rho} - \langle U, L_-(t)V \rangle_{\mathbb{R}^3, \rho} = -\psi \int_{\partial\Omega} ((\eta_u + \omega_u \times x) \cdot (\eta_v + \omega_v \times x)) ((u_\infty - \eta_\infty) \cdot \nu) d\sigma$$

が成り立つ. ここで,  $U|_B = \eta_u + \omega_u \times x$ ,  $V|_B = \eta_v + \omega_v \times x$  である. したがって, (A.3) のもとで, 作用素  $L_+(t)$  と  $L_-(t)$  は pairing  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{R}^3, \rho}$  において共役となる.

また, さらなる仮定

$$\nabla u_\infty \in L^\infty(\mathbb{R}; L^3(\Omega)) \cap C_{loc}^\theta(\mathbb{R}; L^3(\Omega)) \quad (\text{A.5})$$

$$\nabla u_\infty \in L^\infty(\mathbb{R}; L^{q_0}(\Omega)) \quad (\text{A.6})$$

を課し,

$$|||U_\infty|||' := |||U_\infty||| + \sup_{t>0} \|\nabla u_\infty(t)\|_{3,\Omega}$$

とおく. 本研究の主結果の二つ目は非線形問題 (1.2) の可解性及び減衰率を導くことである.

**Theorem 3.2.** (A.1), (A.3), (A.4), (A.5), (A.6) を仮定し,  $[U_\infty]_\theta < \beta$  とする. このとき, ある定数  $\alpha = \alpha(q_0, \beta, M)$  が存在し, もしも  $|||U_\infty|||' < \alpha$  ならば, 方程式 (1.2) は一意な強解  $(u, \eta, \omega)$  が存在し, さらにこの解は任意の  $q \in [3, \infty], r \in [3, \infty)$  に対して  $t \rightarrow \infty$  で

$$\begin{aligned} \|u(t)\|_{q,\Omega} &= O\left(t^{-\frac{3}{2}\left(\frac{1}{q_0}-\frac{1}{q}\right)}\right), \\ \|\nabla u(t)\|_{r,\Omega} + |\eta(t)| + |\omega(t)| &= O\left(t^{-\frac{3}{2q_0}}\right) \end{aligned} \quad (3.1)$$

が成り立つ.

*Remark 1.*

1. 定常問題 (1.1) について, もしも  $u_* \in W^{1-\frac{1}{r}, r}(\partial\Omega)$  かつ

$$\int_{\partial\Omega} \nu \cdot u_* d\sigma = 0$$

のとき, Galdi[4] の方法で構成される定常解  $(u_\infty, \eta_\infty, \omega_\infty)$  は

$$u_\infty \in L^{q_0}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega), \quad \nabla u_\infty \in L^{q_0}(\Omega) \cap L^3(\Omega)$$

を満たす. したがって Theorem 3.2 は, 特に (A.3) のもとで, この定常解の attainability の判定法を与えるものである. 一方, Theorem 3.2 の仮定を満たすような時間周期解の存在定理はまだ研究されていない.

2. Proposition 2.1 を用いると, 仮定 (A.1), (A.2), (A.5) のもとで同様の結果を得ることができる. このとき, (A.4) 及び (A.6) を仮定する必要がなくなる.
3. (A.6) はより速い減衰の証明のためだけに必要で, 仮定 (A.1), (A.3), (A.4), (A.5) のもとでも (1.2) の強解の存在を証明することができる. このとき,  $(u, \eta, \omega)$  は任意の  $q \in [3, \infty], r \in [3, \infty)$  に対して  $t \rightarrow \infty$  で

$$\begin{aligned} \|u(t)\|_{q,\Omega} &= O\left(t^{-\frac{3}{2}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{q}\right)}\right), \\ \|\nabla u(t)\|_{r,\Omega} + |\eta(t)| + |\omega(t)| &= O\left(t^{-\frac{1}{2}}\right) \end{aligned}$$

が成り立つ.

#### 4 Theorem 3.2 の証明の概略

未知関数  $(u, \eta, \omega)$  に対して

$$U := u\chi_\Omega + (\eta + \omega \times x)\chi_B$$

とおくと, 方程式 (1.2) は次のような  $X_q$  上の常微分方程式に書き換えることができる:

$$\frac{dU}{dt} + L_+(t)U = H(U). \quad (4.1)$$

ただし,

$$H(U) := \mathbb{P}[\{-(u - \eta) \cdot \nabla u\}\chi_\Omega] + \mathbb{P}[\{-\psi(u - \eta) \cdot \nabla u_\infty\}\chi_\Omega] \\ + \mathbb{P}[\{-\psi(\psi - 1)(u_\infty - \eta_\infty) \cdot \nabla u_\infty\}\chi_\Omega] - \psi' U_\infty.$$

$$(U_\infty = u_\infty \chi_\Omega + (\eta_\infty + \omega_\infty \times x)\chi_B)$$

である. すると,  $U(0) = 0$  もあり, デュアメルの原理より方程式 (4.1) は

$$U(t) = \int_0^t T(t, \tau)H(U)d\tau \quad (4.2)$$

と書き換えることができる. そこで,

$$(\Lambda U)(t) := \int_0^t T(t, \tau)H(U)d\tau$$

とおき, 関数空間  $E$  を次のように定める:

$$E := \{U \in C((0, \infty); W^{1,3}(\mathbb{R}^3) \cap L^\infty(\mathbb{R}^3));$$

$$U(t) \in X_3, \lim_{t \rightarrow 0} \|U\|_{E(t)} = 0, \|U\|_E < \infty\},$$

$$\|U\|_{E(t)} := \sup_{\tau \in (0, t)} \tau^{\frac{1}{2}} (\|\nabla U(\tau)\|_{3, \mathbb{R}^3} + \|U(\tau)\|_{\infty, \mathbb{R}^3}) \quad (t \in (0, \infty)),$$

$$\|U\|_E := \sup_{t \in (0, \infty)} (\|U\|_{E(t)} + \|U(t)\|_{3, \mathbb{R}^3})$$

Proposition 3.1 を用いることで, 次の補題を得る.

**Lemma 4.1.** (A.1), (A.3), (A.4), (A.5) を仮定し,  $\|U_\infty\|' < \alpha$ ,  $[U_\infty]_\theta < \beta$  とする. すると, 任意の  $U, V \in E$  に対して,  $\Lambda U \in E$  で,  $q_0, \alpha, \beta, \theta$  に依存するある定数  $c_1, c_2, c_3, c_4$  が存在し,

$$\lim_{t \rightarrow 0} \|\Lambda U(t)\|_{3, \mathbb{R}^3} = 0,$$

$$\|\Lambda U\|_E \leq c_1 \|U_\infty\|' \|U\|_E + c_2 \|U\|_E^2 + c_3 (\|U_\infty\|')^2 + c_4 M \|U_\infty\|',$$

$$\|\Lambda U - \Lambda V\|_E \leq (c_1 \|U_\infty\| + c_2 \|U\|_E + c_2 \|V\|_E) \|U - V\|_E.$$

この補題を用いて、写像  $\Lambda$  と関数空間  $E$  に対して縮小写像の原理を適用することで次の命題が得られる。

**Proposition 4.2.** (A.1), (A.3), (A.4), (A.5) を仮定し,  $[U_\infty]_\theta < \beta$  とする。ある定数  $\alpha = \alpha(q_0, \beta, \theta, M)$  が存在し、もしも  $\|U_\infty\|' < \alpha$  ならば、方程式 (4.2) には一意解  $U \in E$  が存在する。

また、より速い減衰 (3.1) については次の命題によって得る：

**Proposition 4.3.** (A.1), (A.3), (A.4), (A.5), (A.6) を仮定する。 $\alpha' \in (0, \alpha]$  が存在し、もしも  $\|U_\infty\|' < \alpha'$  ならば、次の式が成り立つ。

$$\|U(t)\|_{3, \mathbb{R}^3} = O\left(t^{-\frac{3}{2}\left(\frac{1}{q_0}-\frac{1}{3}\right)}\right) \quad (4.3)$$

$$\|U(t)\|_{\infty, \mathbb{R}^3} + \|\nabla U(t)\|_{3, \mathbb{R}^3} = O\left(t^{-\frac{3}{2q_0}}\right) \quad (4.4)$$

これから (4.3) を得るための証明の概略を述べる。 (4.2) 及び  $L^3$ -ノルムの三角不等式より

$$t^{\frac{3}{2}\left(\frac{1}{q_0}-\frac{1}{3}\right)} \|U(t)\|_{3, \mathbb{R}^3} \leq \sum_{j=1}^4 t^{\frac{3}{2}\left(\frac{1}{q_0}-\frac{1}{3}\right)} \int_0^t \|T(t, \tau)H_j\|_{3, \mathbb{R}^3} d\tau$$

が成り立つ。ここで

$$\begin{aligned} H_1 &:= \mathbb{P}[-(u - \eta) \cdot \nabla u] \chi_\Omega, & H_2 &:= \mathbb{P}[-\psi(u - \eta) \cdot \nabla u_\infty] \chi_\Omega \\ H_3 &:= \mathbb{P}[-\psi(\psi - 1)(u_\infty - \eta_\infty) \cdot \nabla u_\infty] \chi_\Omega, & H_4 &:= -\psi' U_\infty \end{aligned}$$

である。 Proposition 3.1 を用いることで、 $t$  に依らないある定数  $C$  を用いて

$$t^{\frac{3}{2}\left(\frac{1}{q_0}-\frac{1}{3}\right)} \int_0^t (\|T(t, \tau)H_2\|_{3, \mathbb{R}^3} + \|T(t, \tau)H_3\|_{3, \mathbb{R}^3} + \|T(t, \tau)H_4\|_{3, \mathbb{R}^3}) d\tau \leq C$$

と評価できる。このとき、Proposition 3.1 の代わりに Proposition 2.1 を用いる場合、

$$H_3 = \mathbb{P} \operatorname{div} [ -\psi(\psi - 1)(u_\infty - \eta_\infty) \otimes u_\infty ] \chi_\Omega$$

と書き換える、(A.2) より

$$(u_\infty - \eta_\infty - \omega_\infty \times x) \cdot \nu|_{\partial\Omega} = (u_\infty - \eta_\infty) \cdot \nu|_{\partial\Omega} = 0$$

が成り立つことから、 $H_3$  に対して Proposition 2.1 の (2.3) を適用することができる。一方、Proposition 3.1 を用いる場合、 $(u_\infty - \eta_\infty) \cdot \nu|_{\partial\Omega} \neq 0$  より、 $H_3$  に対して (2.3) を適用することはできない。そのため、さらなる仮定 (A.6) を要し、この仮定のもとで、 $H_3$  を (2.2) を用いて評価する。再び Proposition 3.1 を用いると、定数  $c_0$  を用いて

$$t^{\frac{3}{2}\left(\frac{1}{q_0}-\frac{1}{3}\right)} \int_0^t \|T(t, \tau)H_1\|_{3, \mathbb{R}^3} d\tau \leq c_0 \|U\|_E \left( \sup_{0 < \tau < t} \tau^{\frac{3}{2}\left(\frac{1}{q_0}-\frac{1}{3}\right)} \|U(\tau)\|_{3, \mathbb{R}^3} \right)$$

と評価できる。そこで  $\|U_\infty\|'$  を小さくとり、 $\|U\|_E < \frac{1}{c_0}$  とすることで、

$$\begin{aligned} t^{\frac{3}{2}\left(\frac{1}{q_0}-\frac{1}{3}\right)}\|U(t)\|_{3,\mathbb{R}^3} &\leq C + c_0\|U\|_E \left( \sup_{0<\tau<t} \tau^{\frac{3}{2}\left(\frac{1}{q_0}-\frac{1}{3}\right)}\|U(\tau)\|_{3,\mathbb{R}^3} \right) \\ &\implies \left( \sup_{0<\tau<t} \tau^{\frac{3}{2}\left(\frac{1}{q_0}-\frac{1}{3}\right)}\|U(\tau)\|_{3,\mathbb{R}^3} \right) \leq C \end{aligned}$$

がいえる。このような議論は absorbing argument と呼ばれ、二つ目の減衰率 (4.4) も同様な考え方で証明することができる。安定性問題では (4.2) に初期値項が現れる一方で、starting problem では  $U(0) = 0$  より (4.2) に初期値項が現れない。このことが起因して、starting problem での摂動の減衰が安定性問題でのそれよりも速いことが証明できる。

## 参考文献

- [1] Ervedoza, S., Maity, D., Tucsnak, M., Large time behavior for the motion of a solid in a viscous incompressible fluid. *Math. Ann.* **385**, 631-691 (2023).
- [2] Finn, R., Stationary solutions of the Navier-Stokes equations, *Proc. Symp. Appl. Math.* **17**, 121-153 (1965).
- [3] Galdi, G.P., Heywood, J.G. and Shibata, Y., On the global existence and convergence to steady state of Navier-Stokes flow past an obstacle that is started from rest, *Arch. Rational Mech. Anal.* **138**, 307-318 (1997).
- [4] Galdi, G.P., On the steady self-propelled motion of a body in a viscous incompressible fluid. *Arch. Ration. Mech. Anal.* **148**, 53-88 (1999).
- [5] Hishida, T., Stability of time-dependent motions for fluid-rigid ball interaction. *J. Math. Fluid Mech.* **26**, (2024).
- [6] Kobayashi, T. and Shibata, Y., On the Oseen equation in the three dimensional exterior domains, *Math. Ann.* **310**, 1-45 (1998).
- [7] Silvestre, A.L., On the self-propelled motion of a rigid body in a viscous liquid and on the attainability of steady symmetric self-propelled motions, *J. Math. Fluid Mech.* **4**, 285-326 (2002).
- [8] Takahashi, T., Existence of a stationary Navier-Stokes flow past a rigid body, with application to starting problem in higher dimensions, *J. Math. Fluid Mech.* **23** (2021).
- [9] Takahashi, T., Attainability of a stationary Navier-Stokes flow around a rigid body rotating from rest, *Funkcialaj Ekvacioj*, **65**, 111-138 (2022).